Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden.

Auszug aus einer Schrift
zur
Erlangung der Doktorwürde
bei der
Hohen Philosophischen Fakultät der
Schles. Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Breslau

vorgelegt von

Harald Geppert.

Promotion: 7. Juli 1923.

HOCHSCHULVERLAG BRESLAU

Schles. Buchdruckerei u. Verlag Karl Vater, Breslau 10, Matthiasstr. 12.

Lebenslauf.

Ich, Harald Geppert, bin am 22. März 1902 als Sohn des Städtischen Mittelschullehrers August Geppert und seiner Frau Ernesta, geb. Belardi, zu Breslau geboren. Nachdem ich die Vorschule des Städtischen Gymnasiums zum hl. Geist in Breslau besucht hatte, trat ich Ostern 1911 in das St. Matthiasgymnasium daselbst ein, das ich nach 9jährigem Besuche mit dem Zeugnis der Reife verließ. Am 19. April 1920 an der Breslauer Universität immatrikuliert, studierte ich Mathematik, Physik und Astronomie, und ergänzte meine Kenntnisse durch ein einsemestriges Studium an der dortigen Technischen Hochschule.

In dankbarer Gesinnung nenne ich die Namen der Herren Professoren und Dozenten, an deren Vorlesungen bezw. Übungen ich teilgenommen habe:

Baumgartner, Buchwald, Heckel, Hoheisel, Hönigswald, Jüttner, Kneser, Koschmieder, Ladenburg, Lummer, Patzak, Reiche, Schaefer, Schrödinger, Schur, Volz, Waetzmann, Wilkens.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern spreche ich hiermit meinen aufrichtigen Dank aus. Ganz besonders fühle ich mich Herrn Geh.-Rat Professor Dr. Kneser für die in seinen Vorlesungen und Seminaren erhaltene wissenschaftliche Förderung und die Anregung zu meiner Dissertation zu steter Dankbarkeit verpflichtet.

Referent: Geh.-Rat Prof. Dr. Kneser.

Rigorosum: 30. Mai 1923.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau.

Meine Dissertationsarbeit stellt eine kritische Durchsicht und Erweiterung einer im Jahre 1827 von Cauchy publizierten Abhandlung:

Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique

dar, die trotz ihrer Reichhaltigkeit gänzlich unbeachtet geblieben ist und auch in den gesammelten Werken nicht veröffentlicht wurde.

Unsern Ausgangspunkt bildet eine lineare homogene Differentialgleichung in der räumlichen Variablen x und der zeitlichen t mit konstanten Koeffizienten, für die gewisse Rand- und Anfangsbedingungen vorgeschrieben sind. Es gelingt zunächst, eine die Randbedingungen erfüllende Lösung in Form eines Konturintegrals zu finden. Um mit dieser auch die Anfangsbedingungen befriedigen zu können, wird zunächst die biorthogonale Entwicklung mit Hilfe zweier adjungierter Differentialgleichungen angewandt, für deren Konvergenz ich in Anlehnung an Birkhoff [1]) einen ausführlichen Beweis gebe. Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt in einer weiteren allgemeinen Entwicklung, die, im Gegensatz zu der biorthogonalen aus der vorgelegten Differentialgleichung ohne Vermittlung der adjungierten sofort abgelesen werden kann. Ich beweise diese neue Entwicklung, sowie ihre Konvergenz, erweitere sie auf Differentialgleichungen ungerader Ordnung und wende sie schließlich auf spezielle physikalische Probleme an. Der wichtigste Teil unsrer Ausführungen läßt sich in den folgenden Satz zusammenfassen:

Satz: Sei F (r, s) eine ganze rationale Funktion der Variablen r, s vom Grade $n = 2\mu$ bezüglich r und vom Grade m bezüglich s, in der die Variablen getrennt und die Koeffizienten konstant sind. Sei ferner $V = \Phi(x, r)$ eine Funktion von x, r, die durch die Differentialgleichung:

$$F(D_x, s)\, V = V \cdot F(r, s),$$

[1]) G. D. Birkhoff, American Transactions IX. 1909. p. 219 und 373.

sowie durch die normierten, regulären, linearen, homogenen Randbedingungen:

$$\text{für } x = x_0:\ f_0(D_x)\,V = -f_0(r);\ f_1(D_x)\,V = -f_1(r);$$
$$\ldots\ldots f_{\mu-1}(D_x)\,V = -f_{\mu-1}(r);$$
$$\text{für } x = x_1:\ f_\mu(D_x)\,V = 0;\ f_{\mu+1}(D_x)\,V = 0;$$
$$\ldots\ldots f_{n-1}(D_x)\,V = 0$$

definiert ist. Dann gilt für eine stückweise stetige beschränkte, mit beschränkter integrierbarer Ableitung versehene Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x_1 die Entwicklung:

$$f(x) = \sum_r \operatorname{Res} \Phi(x, r) \cdot \int_{x_0}^{x_1} e^{-r \cdot (v - x_0)} \cdot f(v) \cdot dv$$

Das Integral der Differentialgleichung:

$$F(D_x, D_t)\,z = 0,$$

das die Randbedingungen:

$$\text{für } x = x_0:\ f_0(D_x)\,z = 0;\ f_1(D_x)\,z = 0;$$
$$\ldots\ldots f_{\mu-1}(D_x)\,z = 0;$$
$$\text{für } x = x_1:\ f_\mu(D_x)\,z = 0;\ f_{\mu+1}(D_x)\,z = 0;$$
$$\ldots\ldots f_{n-1}(D_x)\,z = 0,$$

und die Anfangsbedingungen:

$$\text{für } t = t_0:\ z = \bar{f}_0(x);\ \frac{\partial z}{\partial t} = \bar{f}_1(x);\ \ldots\ldots \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} = \bar{f}_{m-1}(x)$$

erfüllt, lautet:

$$z = \oint\oint \frac{e^{s(t-t_0)}}{F(r, s)} \cdot \Phi(x, r) \cdot \int_{x_0}^{x_1} e^{-r \cdot (v - x_0)}$$
$$\frac{F(r, s) - F[r, \bar{f}(v)]}{s - \bar{f}(v)} \cdot dv \cdot \frac{dr}{2\pi i}\,\frac{ds}{2\pi i},$$

wobei im innern Integranden in der Entwicklung nach Potenzen von $\bar{f}(v)$ die Exponenten durch Indizes zu ersetzen sind, und die Konturintegrale sich über die unendlich ferne Kreiskontur der r — bezw. s — Ebene erstrecken.